

A.J.J.M. Ruijsenaars
J.E.H. van Luit
E.C.D.M. van Lieshout
Rekenproblemen en dyscalculie

ORTHO - Inleidingen, monografieën en leerboeken op het gebied van de orthopedagogiek, de orthodidactiek en het klinische en experimentele onderzoek op orthopedagogisch gebied, met bijzondere aandacht voor de herkenning en de behandeling van opvoedingsmoeilijkheden, ontwikkelingsproblemen, gedragsstoornissen en leerproblemen.

De reeks staat onder redactie van prof. dr. H. Nakken, prof. dr. J.D. van der Ploeg en prof. dr. J.M.A.M. Janssens

A.J.J.M. Ruijsenaars
J.E.H. van Luit
E.C.D.M. van Lieshout

Rekenproblemen en dyscalculie

Theorie, onderzoek,
diagnostiek en behandeling

Omslagillustratie: © Salvador Dali, Fundación Gala-Salvador Dali, *Apparat und Hand*
c/o Beeldrecht Amsterdam 2004

Omslagontwerp: Rinke Doornekamp, Utrecht

© Lemniscaat b.v. Rotterdam 2004

ISBN 90 5637 660 8

Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd en/of openbaar gemaakt door middel van druk, fotokopie, microfilm, geluidsband of op welke andere wijze ook, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Druk- en bindwerk: Hentenaar Boek, Nieuwegein

Inhoud

<i>Voorwoord</i>	11
Deel 1 De noodzaak van alternatieve theorieën	13
1 Ter inleiding: rekenen, rekenproblemen en dyscalculie	14
1.1 Waar komt ons rekenen vandaan?	15
1.2 Leren en individuele verschillen	20
1.3 Rekenen en rekenproblemen	23
1.3.1 <i>Feiten en procedures</i>	25
1.3.2 <i>Automatiseren van kennis</i>	27
1.4 Ernstige rekenproblemen: dyscalculie	28
1.5 Dyscalculie en co-morbiditeit	29
1.6 Diagnostiek en behandeling	32
1.7 De verdere opbouw van dit boek	32
1.7.1 <i>Leren rekenen in hoofdlijnen</i>	33
1.7.2 <i>De behoefte aan ordening in theorieën</i>	34
1.8 Tot slot	38
2 Cognitieve ontwikkeling en leren: cognitieve ontwikkelingspsychologie en handelings(leer)psychologie	39
2.1 Cognitieve ontwikkelingspsychologie	40
2.1.1 <i>Getalbegrip</i>	41
2.1.2 <i>Hoe komt het begrip van wat een getal is tot stand?</i>	43
<i>Conservatie</i>	44
<i>Correspondentie</i>	46
<i>Classificatie</i>	47
<i>Seriatie</i>	48
<i>Tellen</i>	49
<i>Rekentaal</i>	50
<i>Maatbegrip</i>	52
<i>Ter afsluiting</i>	54
2.2 Handelings(leer)psychologie	55
2.2.1 <i>Het ontstaan van denkhandelingen en handelingsstructuren</i>	56
<i>De mate van verinnerlijking van handelingen</i>	58
<i>De mate van verkorting van handelingen</i>	59
<i>De mate van beheersing van handelingen</i>	60
<i>De mate van wendbaarheid van handelingen</i>	60
2.2.2 <i>De verschillende functies van handelingen</i>	62
2.2.3 <i>De rol van onderwijs en didactiek bij het ontstaan van handelingsstructuren</i>	63
2.3 Tot slot	65

3	Leren en cognitieve processen: leerpsychologie en cognitieve psychologie	67
3.1	Behaviorisme als associatieve leerpsychologie: veranderingen in de relaties tussen stimuli en responsen	68
3.1.1	<i>Klassieke conditionering</i>	68
3.1.2	<i>Operante conditionering</i>	70
3.2	Cognitieve leerpsychologie: veranderingen in onderliggende processen	74
3.3	Cognitieve psychologie: processen van probleemoplossing en informatieverwerking als interne mentale processen	76
3.3.1	<i>Cognitieve psychologie en processen van probleemoplossing</i>	77
	<i>Model van het probleemoplossingsproces</i>	78
	<i>Het onderkennen van het probleem: bewustwording en identificatie</i>	81
	<i>Oplossingsmethoden vinden, ontwikkelen en toepassen</i>	82
	<i>Oplossingen geven, controleren en integreren</i>	86
3.3.2	<i>Cognitieve psychologie en processen van informatieverwerking</i>	86
	<i>Het informatieverwerkingsmodel</i>	87
	<i>Kortetermijngeheugen en werkgeheugen</i>	88
	<i>Langetermijngeheugen en typen kennis: declaratief, procedureel en metacognitief</i>	90
	<i>Informatieverwerking en strategieën</i>	94
	<i>Nieuwe ontwikkelingen</i>	96
3.4	Tot slot	98
4	Onderwijsleerprocessen en individuele mogelijkheden	99
4.1	Onderwijsleerprocessen: (algemene) didactiek en onderwijspsychologie	100
4.1.1	<i>Didactiek</i>	100
4.1.2	<i>Onderwijspsychologie</i>	102
	<i>Constructivisme en sociaal constructivisme</i>	103
	<i>Realistisch rekenen</i>	105
	<i>Realistisch rekenen en rekenproblemen</i>	107
4.2	Individuele verschillen in aanleg, leren en leerbaarheid: intelligentiepsychologie en theorie van de leergeschiktheid	108
4.2.1	<i>Intelligentiepsychologie (differentiële psychologie)</i>	109
	<i>Intelligentietests en rekenen</i>	112
4.2.2	<i>Theorie van de leergeschiktheid en leerpotentieelonderzoek</i>	114
	<i>Kwalitatieve kenmerken van leerpotentieel</i>	117
	<i>Leerpotentieel en predictie van toekomstig leren</i>	118
4.3	Hersenen en leren: neuropsychologie	121
4.3.1	<i>Neuropsychologie, rekenen en dyscalculie</i>	124
4.4	Tot slot	127

Deel 2	Rekenonderwijs, rekenproblemen en eerste opvang	129
5	De inhoud van het rekenwiskundeonderwijs	130
5.1	Tussendoelen en leerlijnen in het rekenwiskundeonderwijs	132
5.1.1	<i>Groep 1 en 2</i>	132
5.1.2	<i>Groep 3</i>	134
5.1.3	<i>Groep 4</i>	135
5.1.4	<i>Groep 5 t/m 8</i>	137
5.2	Rekenwiskundemethoden	143
5.3	Rekenmethoden en rekenzwakke leerlingen	147
5.4	Algemene didactische principes	150
5.4.1	<i>Planmatig handelen</i>	154
5.4.2	<i>Strategisch handelen</i>	155
5.4.3	<i>Instructietijd (effectieve instructie)</i>	156
5.4.4	<i>Organisatie van het onderwijsleerproces</i>	157
5.4.5	<i>Pedagogisch functioneren</i>	157
5.5	Vakspecifieke didactische principes	158
5.5.1	<i>Grondige voorbereiding van het formele rekenen</i>	159
5.5.2	<i>Uitgaan van contexten</i>	159
5.5.3	<i>Nadruk op het handelen</i>	159
5.5.4	<i>Onder woorden brengen</i>	159
5.5.5	<i>Gebruik van modellen en schema's (progressief schematiseren)</i>	160
5.5.6	<i>Beperkte omvang van de leerstof</i>	162
5.5.7	<i>Extra aandacht voor het automatiseren van sommen</i>	163
5.6	Tot slot	164
6	Vorbereidende rekenvaardigheid en rekenproblemen	165
6.1	Kleuters en getallen	166
6.1.1	<i>Getalgevoeligheid bij (zeer) jonge kinderen</i>	166
6.1.2	<i>De traditionele rekenvoorwaarden</i>	168
6.1.3	<i>De ontwikkeling van het tellen</i>	170
6.1.4	<i>Wetenschappelijk onderzoek naar voorbereidende rekenvaardigheid</i>	173
6.1.5	<i>Achterstand bij kinderen van Turkse en Marokkaanse afkomst</i>	174
6.2	Signaleren	175
6.2.1	<i>Het signaleren van achterstand in de ontwikkeling van voorbereidende rekenvaardigheid</i>	175
6.2.2	<i>Niveaus van voorbereidende rekenvaardigheid</i>	177
6.3	Ondersteuning aan 'rekenzwakke' kleuters	178
6.3.1	<i>Het rekenwiskundeonderwijs aan kleuters</i>	178
6.3.2	<i>De remediëring van vroege rekenproblemen bij kleuters</i>	179
6.3.3	<i>Banende en sturende instructie</i>	182
6.4	Tot slot	183

7	Rekenvaardigheden en rekenproblemen in de basisschoolperiode	184
7.1	Automatisering van rekenfeiten	185
7.1.1	<i>Automatisering: theorieën en feiten</i>	185
7.1.2	<i>Problemen bij automatisering</i>	194
7.1.3	<i>Training van automatisering</i>	196
7.2	Informeel rekenkennis, redactierekenen en contexten	200
7.2.1	<i>Functie van redactieopgaven in het rekenonderwijs</i>	200
7.2.2	<i>Semantische opgavenstructuur en oplossingsstrategieën</i>	203
7.2.3	<i>Problemen bij het oplossen van redactieopgaven</i>	207
7.2.4	<i>Strategietraining</i>	211
	<i>Training van metacognitie en specifieke strategieën</i>	211
	<i>Training van het concreet representeren</i>	213
	<i>Training van het schematisch of symbolisch representeren</i>	215
7.2.5	<i>Het ‘spel der schoolvraagstukken’</i>	217
7.3	Rekenen tot 100	218
7.3.1	<i>Cijferen</i>	219
7.3.2	<i>Hoofdrekenen</i>	222
7.4	Tot slot	229
8	Rekenen/wiskunde bij de start in het voortgezet onderwijs en de problemen daarbij	230
8.1	Rekenen/wiskunde in het voortgezet onderwijs	231
8.1.1	<i>Realistisch rekenwiskundeonderwijs</i>	232
8.1.2	<i>Kennis en vaardigheden</i>	232
8.2	Leerstofdomeneinen in het voortgezet onderwijs en eerste signalering van problemen	234
8.3	Rekenproblemen bij zwak presterende leerlingen	235
8.3.1	<i>Leerbaarheid</i>	236
8.3.2	<i>Adequate opslag van informatie</i>	237
8.3.3	<i>Self-efficacy (‘eigen kunnen’)</i>	238
8.4	Hulp bij rekenwiskundeproblemen	239
8.5	Opbouw van lessen voor leerlingen met een achterstand in rekenen/wiskunde	244
8.6	Tot slot	246
Deel 3	Individuele problemen, diagnostiek en behandeling	249
9	Diagnostiek van rekenproblemen en dyscalculie	250
9.1	Diagnostiek op het continuüm van zorg en deskundigheid	253
9.1.1	<i>Groepsgewijs en individueel onderzoek</i>	255
9.1.2	<i>Niveautoetsen en criteriumtoetsen</i>	257
9.1.3	<i>Foutenclassificatie en foutenanalyse</i>	258
9.1.4	<i>Longitudinale diagnostiek</i>	259
9.1.5	<i>Didactische leeftijd, didactische leeftijdsequivalent en leerrendement</i>	260
9.2	De stappen in de diagnostische cyclus	261
9.2.1	<i>Signalering, klachtanalyse en formulering van de hulpvraag</i>	267

9.2.2	<i>Probleemanalyse</i>	271
	<i>Probleemanalyse als ordening, beschrijving en classificatie van concreet rekengedrag</i>	271
	<i>Probleemanalyse als onderkenning, classificatie en benoeming van een rekenstoornis</i>	276
	<i>Taxatie van de ernst</i>	279
9.2.3	<i>Verklaringsanalyse</i>	280
9.2.4	<i>Indicatieanalyse</i>	287
9.3	Diagnostiek van dyscalculie en de dyscalculieverklaring	288
9.4	Tot slot	294
10	Behandeling van rekenproblemen en dyscalculie	295
10.1	Behandeling op het continuüm van zorg en deskundigheid	297
10.1.1	<i>Remedial teaching en behandeling</i>	297
10.1.2	<i>Beslissingen bij het inzetten van een programma/methode voor RT</i>	299
10.1.3	<i>Criteria bij het kiezen van RT-programma's</i>	302
10.1.4	<i>De overgang van diagnostiek naar behandeling</i>	303
10.2	De stappen in de behandelingscyclus	304
10.2.1	<i>Verkennde behandelingsanalyse</i>	309
10.2.2	<i>Voorspellen van reacties</i>	312
	<i>Type kennis en kwaliteit van kennis</i>	312
	<i>Instructieprincipes</i>	314
	<i>Type stimulus, respons en gevraagd proces</i>	316
	<i>Type feedback</i>	321
10.2.3	<i>Toetsende behandeling</i>	323
10.2.4	<i>Evaluatie ten opzichte van het globale doel</i>	324
10.3	De analyse van effectstudies	324
10.3.1	<i>Analyse van effectstudies vanuit het model van de behandelingscyclus</i>	324
10.3.2	<i>Analyse van effectstudies vanuit specifieke probleemdomeninen</i>	328
	<i>Onderzoek naar rekenproblemen in het leren optellen en aftrekken</i>	330
	<i>Onderzoek naar rekenproblemen in het leren vermenigvuldigen</i>	332
10.3.3	<i>Conclusie</i>	334
10.4	Individuele behandeling	335
10.5	Tot slot	344
	Nawoord: terugblik en perspectief	345
	Literatuur	347
	Trefwoordenregister	387

VOORWOORD

In 1992 kwam de eerste druk uit van het boek *Rekenproblemen. Theorie, diagnostiek, behandeling*. Het heeft op ruime schaal z'n weg gevonden, zowel naar opleidingen als naar professionals in de praktijk. Sindsdien is er veel veranderd.

Vrijwel alle scholen voor regulier onderwijs zijn gebruik gaan maken van realistische methoden, op ruimere schaal dan het geval is in scholen voor speciaal (basis)onderwijs. Bovendien ontstonden samenwerkingsverbanden, met veranderingen in de organisatie van de zorg voor leerlingen met leerproblemen. De functies van preventief ambulante begeleider en van intern begeleider vonden ingang. Tegelijkertijd ontstonden meer mogelijkheden voor buitenschoolse hulp door (gekwaliceerde) remedial teachers en door gespecialiseerde (geregistreerde) orthopedagogen en psychologen. Gepaard hieraan deed zich de behoefte voor aan eenduidige praktijkvoorschriften en aan protocollering. Voor wat betreft de organisatie rond en de aanpak van (ernstige) rekenproblemen gelden de ontwikkelingen ten aanzien van (ernstige) leesproblemen en dyslexie als voorbeeld. Voor dyslexie zijn – op basis van deugdelijke theorievorming, empirisch onderzoek en internationale consensus – praktijkprotocollen ontwikkeld en geïmplementeerd, ondersteund door adequaat overheidsbeleid. Er zijn breed geaccepteerde afspraken over de criteria voor onderkenning en er is toenemende overeenstemming over de belangrijkste en empirisch gefundeerde, verklarende theorieën.

De vooruitgang wat betreft inzichten aangaande rekenproblemen en dyscalculie geniet een beperkte publieke en zeker ook politieke belangstelling, maar is niet minder dan die ten aanzien van leesproblemen en dyslexie. Het empirisch onderzoek heeft een grote vlucht genomen, zeker ook in ons eigen taalgebied. De vraag uit de praktijk naar duidelijke afspraken over onderkenning en naar een deugdelijke aanpak neemt toe. Gelet op de veelheid van ontwikkelingen hebben we afgezien van een herschrijving van het boek uit 1992, maar is ervoor gekozen om collectief een nieuw boek te schrijven, met daarin slechts enkele 'oude' (herschreven) fragmenten. Ruime aandacht is dan ook gegeven aan recente ontwikkelingen in het wetenschappelijk onderzoek dat zich bezighoudt met het verklaren en behandelen van rekenproblemen, en met rekenonderwijs dat rekening tracht te houden met de behoeften van leerlingen met zwakke rekenprestaties. Uitdrukkelijk gaan we in op dyscalculie en worden voorstellen gedaan voor diagnostiek en behandeling, die in benadering overeenkomen met de manier van denken over dyslexie.

Evenals de voorloper uit 1992 is het huidige boek bedoeld voor opleidingen en beroepsbeoefenaars in de praktijk. Het boek biedt tevens een overzicht voor degenen die met onderzoek op het gebied van rekenproblemen bezig zijn. De hoofdtekst is aangevuld met boxen waarin extra informatie wordt gegeven. Deze informatie bestaat onder andere uit beschrijvingen van wetenschappelijke onderzoeken voor de meer wetenschappelijk geïnteresseerde lezer. Opleidingen kunnen afhankelijk van hun doelstelling al dan niet gebruikmaken van deze boxen.

Met *Rekenproblemen en dyscalculie* geven we een overzicht van de belangrijkste theorieën die kunnen bijdragen aan een verantwoorde hulpverlening. We koppelen ze aan de ontwikkeling van de rekenwiskundekennis vanaf de start van de jongste

groepen in het basisonderwijs tot en met de beginperiode van het voortgezet onderwijs. De pretentie is niet die van een uitputtend handboek, maar van een document dat inzicht biedt in de aard van de problemen, dat stimuleert tot een meer verantwoorde aanpak en dat ook kan inspireren tot nieuwe onderzoeksvragen. Gezien de voortgaande ontwikkelingen verwachten we dat we hiermee nog niet het laatste woord gezegd zullen hebben.

Wied Ruijsenaars, Hans van Luit & Ernest van Lieshout

Deel 1

De noodzaak van alternatieve theorieën

Wetenschap is in ontwikkeling. Nieuwe feiten en bijstellingen van inzichten wisselen elkaar voortdurend af. Voor onderzoekers is dat niet alleen een gegeven, maar het vormt ook een belangrijke uitdaging. Behalve veranderingen in de tijd zijn er verschillende manieren om hetzelfde onderwerp te bestuderen, met een variatie aan wetenschappelijke theorieën, onderzoeksmiddelen en -methoden. En vooralsnog heeft geen enkele theorie het monopolie op de waarheid. Voor de beschrijving, verklaring en aanpak van rekenproblemen en rekenstoornissen hebben we aldus de beschikking over alternatieve wetenschappelijke theorieën. We zullen daarom in de praktijk beredeneerde keuzes moeten maken, afhankelijk van de aard van het probleem en van het doel dat we willen bereiken. Het maken van keuzes vereist kennis. In dit deel geven we een beeld van de wijze waarop vanuit verschillende theoretische invalshoeken gedacht wordt over rekenen en over meer of minder ernstige stagnaties daarin.

1 TER INLEIDING: REKENEN, REKENPROBLEMEN EN DYSCALCULIE

- 1.1 Waar komt ons rekenen vandaan?
- 1.2 Leren en individuele verschillen
- 1.3 Rekenen en rekenproblemen
 - 1.3.1 *Feiten en procedures*
 - 1.3.2 *Automatiseren van kennis*
- 1.4 Ernstige rekenproblemen: dyscalculie
- 1.5 Dyscalculie en co-morbiditeit
- 1.6 Diagnostiek en behandeling
- 1.7 De verdere opbouw van dit boek
 - 1.7.1 *Leren rekenen in hoofdlijnen*
 - 1.7.2 *De behoefte aan ordening in theorieën*
- 1.8 Tot slot

Kinderen doen al jong – en voordat ze naar school gaan – veel ervaring op met hoeveelheden en met de taal die daarnaar verwijst. Daarop aansluitend krijgen ze binnen het onderwijs het meer formele afsprakensysteem uitgelegd en worden ze, meer of minder sturend, ingeleid in de standaardprocedures voor rekenen en wiskunde die onze samenleving kent. Kinderen verwerven zo binnen korte tijd kennis en vaardigheden waar in verschillende culturen duizenden jaren voor nodig waren om tot ontwikkeling te komen. En die kennis is nog altijd in wording. Nieuwe wiskundige theorieën blijken in staat verschijnselen beter te beschrijven of leiden tot betere voorspellingen. Dagelijkse toepassingen zien we bijvoorbeeld in de wiskundige modellen die bij de berekening van de weersvoorzichten worden gebruikt of in de interactieve systemen bij filewaarschuwingen en routeplanners. Wanneer we ons realiseren dat de Grieken en Romeinen nog geen getal 0 kenden en evenmin een positiestelsel in het rekenen hadden, wordt duidelijk welke kennisrevolutie zich de laatste eeuwen heeft afgespeeld.

rekenprobleem In dit boek gaan we in een aantal hoofdstukken uitgebreid in op het leren rekenen en op de problemen die zich daarbij kunnen voordoen. Een rekenprobleem is een *leer*probleem, soms in een zo hardnekkige vorm dat we van een leerstoornis of dyscalculie spreken. Problemen in het leren rekenen kunnen op zichzelf staan, maar ook samengaan met moeilijkheden in andere vaardigheden. Ze doen zich bij sommige kinderen al op jonge leeftijd voor, bij andere pas later wanneer steeds meer een beroep gedaan wordt op kennis en vaardigheden waarvan verondersteld mag worden dat ze geautomatiseerd zijn. Om de variatie aan rekenproblemen te beschrijven en mogelijke verklaringen te bespreken staan ons verschillende, elkaar aanvullende, alternatieve theorieën ter beschikking.

alternatieve theorieën

De achtergronden voor het ontstaan van rekenproblemen kunnen van geval tot geval verschillen. Naast factoren in het onderwijs, zoals de opbouw

diagnostisch
onderzoek
specifieke hulp
of behandeling

van de leerstof en de manier van instructie geven door de leerkracht, zijn individugebonden verklaringen denkbaar, zoals: problemen in het leren van de specifieke rekentaal en het opslaan of vlot oproepen van informatie uit het geheugen. Wanneer het leerproces stagneert en de gewone didactiek of remediële hulp niet meer voldoen, is wellicht individueel diagnostisch onderzoek nodig om zicht te krijgen op het *waarom* van de uitval en op de mogelijkheden voor specifieke hulp of behandeling.

Dit eerste hoofdstuk leidt de belangrijkste van de hiervoor genoemde onderwerpen in. We schetsen daarmee het kader en de opbouw van de thema's die in het boek zijn gegroepeerd in drie delen: de verschillende theorieën over cognitieve ontwikkeling en leren (hoofdstuk 2, 3, 4), de opbouw van het rekenonderwijs, de eventuele problemen daarin en de mogelijkheden voor planmatige remediëring (hoofdstuk 5, 6, 7, 8), gevolgd door de werkwijze in individuele diagnostiek en behandeling (hoofdstuk 9 en 10). We leiden in een intermezzo elk deel telkens kort in. Het geheel wordt afgesloten met een terugblik en een schets van te verwachten nieuwe ontwikkelingen. Immers, ook ónze kennis is voortdurend in wording en zal op een later moment ongetwijfeld aanpassing behoeven.

1.1 WAAR KOMT ONS REKENEN VANDAAN?

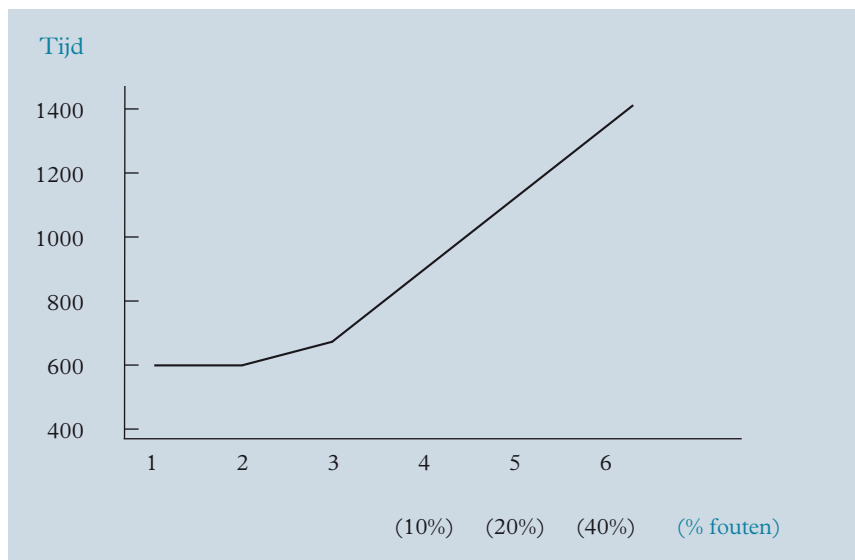
Het verhaal gaat (vrij naar: Ifrah, 2000, p. 3) dat een herenboer een kraai probeerde te vangen die uitgerekend in zijn toren een nest had gebouwd. Herenboeren hebben het niet op kraaien. Behalve dan om ze op het land met 'n touwtje aan één poot ondersteboven op te hangen, ter afschrikking van hun soortgenoten. Dat betekent zoveel als: hier niet parkeren. Maar telkens wanneer de boer de toren in ging, vloog de kraai weg en kwam hij pas terug als de boer weer naar buiten kwam. Deze bleek ook zelf niet voor één gat te vangen en bedacht een list. Hij ging de volgende dag samen met een knecht de toren in en stuurde die er na enige tijd weer uit. Zelf wachtte hij de kraai binnen op. Althans, dat was de bedoeling. Maar de weggevologen kraai bleef in een hoge boom in de buurt veilig wachten, net zo lang tot ook de boer de toren weer verliet. Deze gooide een tweede knecht in de strijd: met z'n drieën naar binnen, na even wachten met twee weer naar buiten, terwijl hij zelf binnen al een recept bedacht voor gefileerde kraaienborst. Echter, de zwartjurk doorzag de truc en wachtte ook nu rustig af. Omdat het om een welgestelde herenboer-met-eigen-toren ging, kon de list met meer knechten worden uitgebreid. Pas toen ze met z'n vijven naar binnen gingen en met z'n vieren weer naar buiten kwamen, raakte de kraai zowel het overzicht als z'n leven kwijt.

De vraag die dit oproept, is: Was dit nu een superkraai? Zo eentje die je tegenwoordig niet meer ziet? Het blijkt van niet. Andere kraaien kunnen het ook, net als eksters en nachtegalen. Op hun beurt hebben honden, katten, apen en olifanten het in de gaten wanneer er één exemplaar weg is van een kleine hoeveelheid bekende voorwerpen of jongen. Goudvinken kunnen, zij het na enige scholing,

zonder problemen een onderscheid maken tussen verschillende hoeveelheden: 3 en 1; 3 en 2; 4 en 2; 4 en 3; maar ook 6 en 3. Proeven met ratten en duiven geven hetzelfde beeld. Dieren – en mensen – hebben tot op zekere hoogte een aangeboren gevoel voor hoeveelheid. Het ligt voor de hand dat dit een vorm van lijfsbehoud is en in de evolutie tot stand is gekomen. De kraai leeft zo een dag langer, maar ook voor een roofdier is het wel zo handig om twee warme maaltijden tegelijk op voorraad in de gaten te houden in plaats van één. En eekhoorns hebben een voorkeur voor de tak met de meeste nootjes.

Het vermogen om tot op zekere hoogte hoeveelheden in te schatten is bij dieren kennelijk in aanleg gegeven. De kraai die hooguit vier objecten tegelijk overziet, doet het niet slechter dan de mens. Ook bij mensen ligt de grens voor het direct overzien (zie hoofdstuk 6: ‘subiteren’) van hoeveelheden bij drie à vier. Zijn het er meer, dan moeten we tellen en dat kost tijd. De talrijke experimenten waarin proefpersonen aangeven hoeveel voorwerpen ze zien, geven eenzelfde beeld (Dehaene, 1997, p. 67): bij één, twee of drie voorwerpen hebben ze gemiddeld telkens iets meer dan een halve seconde nodig (zo rond de 600 milliseconden), maar boven dat aantal neemt de antwoordtijd systematisch toe met ruwweg 150 milliseconden per voorwerp. Figuur 1.1 geeft dit weer. Bovendien stijgt het aantal fouten bij vier of meer voorwerpen aanzienlijk. Dit geldt natuurlijk niet voor hoeveelheden in vaste patronen, zoals op een dobbelsteen of rekenrek. Een vast patroon van vijf stippen hoeven we dan niet te tellen, maar herkennen we als één figuur.

Figuur 1.1



Toename van de tijd (op de verticale as, in milliseconden) die nodig is om van voorwerpen de hoeveelheid (horizontale as) te bepalen, met tussen haakjes het toenemende foutenpercentage

Diverse proeven bevestigen dat ook mensen van nature en bij geboorte al iets met hoeveelheden kunnen. Baby's zijn kort na hun geboorte – binnen enkele dagen tot enkele weken – in staat verschil te zien tussen twee en drie objecten (figuren met puntjes, of afbeeldingen van voorwerpen; zie: Dehaene, 1997, p. 50). De manier waarop dat wordt onderzocht, komt neer op het volgende principe. De baby's kijken naar een scherm waarop wisselende afbeeldingen van bijvoorbeeld telkens twee rondjes gepresenteerd worden. Na een aantal aanbiedingen treedt er gewenning op en verslapt de aandacht (te meten als afnemende hersenactiviteit). Maar wanneer er dan opeens drie rondjes worden getoond, dan kijken ze langer, neemt de hersenactiviteit toe en merken ze dus kennelijk het verschil in aantal.

tellen
taal
denken over
aantallen

Er is overigens een belangrijk verschil tussen mensen en dieren: dieren hebben een zeer beperkte notie van hoeveelheid, maar mensen kunnen leren tellen en bij grote aantallen en met voldoende tijd exact de juiste hoeveelheid uitdrukken in een naam of getal. In onze taal hebben we een zeer uitgebreid afsprakensysteem ontwikkeld om met hoeveelheden om te gaan. Bovendien kunnen mensen denken over aantallen en met getallen spelen. Van het 'spelen' met getallen en het gebruiken van onverwachte interpretaties geven we twee voorbeelden (bron onbekend).

Twee vrienden komen elkaar op een feest bij de ingang tegen. De een gaat net weg, de ander wil naar binnen en vraagt of er nog veel mensen zijn. 'Ongeveer 603' krijgt hij als reactie. 'Waarom ongeveer?' wil de komende gast weten. Het antwoord luidt: 'Van die 3 ben ik zeker, maar van die 600 niet.'

Een leraar komt op z'n fiets in de stad een oud-leerling tegen die net z'n open sportwagen half op het fietspad heeft geparkeerd. De leraar draagt een overjarig windjack, de oud-leerling een lange bontjas. Het gaat zichtbaar goed met 'm. Hij blijkt in zaken te zitten, vooral in- en verkoop. 'Hoe doe je dat?' vraagt de leraar, bij wie herinneringen opkomen aan een hopeloze leerling. 'Heb je geen last van je rekenproblemen?' 'Het valt nu eigenlijk wel mee,' reageert de oud-leerling, 'ik koop bijvoorbeeld een grote partij bontjassen voor 200 euro per stuk en verkoop ze door voor 600 euro. En met die 3% winst ben ik tevreden.'

afspraken-
systeem

Met onze taal kunnen we hoeveelheden en relaties daartussen precies benoemen en erover met anderen communiceren. Rekenen/wiskunde is in de eerste plaats een taal, een afsprakensysteem. De mens is al duizenden jaren bezig om die taal te perfectioneren. Van generatie op generatie wordt het systeem overgeleverd en weer verbeterd. We leren wat een teller, noemer, quotiënt of X-as is, of dat de plaats van de haakjes in een bewerking cruciaal is (bijvoorbeeld: $1 + (5 \times 6) = 31$, maar $(1 + 5) \times 6 = 36$). Op den duur weten we dat bij 12×12 de uitkomst 144 hoort, dat 4 de wortel van 16 is, en lezen we met gemak symbolen als: +, >, π en %.

Toch is het goed dat we ons realiseren dat veel van dit soort afspraken in

positiestelsel
getal '0'

feite relatief nieuwe 'uitvindingen' zijn. Zo zijn we allemaal vertrouwd met getallen die zijn opgebouwd uit eenheden, tientallen, honderdtallen en meer. We zetten ze onder elkaar, tellen cijferend op, trekken af, delen en vermenigvuldigen. Maar de Romeinen deden dat nog niet, evenmin als de Grieken. Zij kenden geen positiestelsel in getallen en – wat nog opmerkelijker is – ze hadden geen getal '0'. Ons getal '0' is een ontdekking die pas rond de 6^e eeuw van onze jaartelling in India tot stand kwam (Gazalé, 2000; Ifrah, 2000). In box 1.1 geven we enkele historische gegevens uit het ontstaan van het werken met getallen.

BOX 1.1 ENKELE HISTORISCHE GEGEVENS (GAZALÉ, 2000; IFRAH, 2000)

Getallen zijn voor ons zo gewoon, dat we ons niet meer afvragen hoe en waar getallen zijn ontstaan. Ifrah (2000) noemt het getal '1' de eerste grote uitvinding en – duizenden jaren later – de aanduiding voor '0' de laatste revolutionaire stap. In het verre verleden konden dieren en mensen al kleine aantallen ineens herkennen. In de evolutie van taal als menselijk communicatiemiddel – aanvankelijk waren dit gebaren, later ook spraakklanken – ontstonden daarbij eenvoudige hoeveelheidsaanduidingen: 'één, twee, veel'. Bij primitieve volken zijn telsystemen gevonden met namen voor 'één' en 'twee', te combineren tot bijvoorbeeld 'één én twee' (om drie weer te geven) en tot 'twee én twee' (voor vier objecten). Voor grote hoeveelheden volstond een omschrijving als: 'haren op m'n hoofd'. Overigens legt Ifrah een (hypothetisch) verband tussen de moeite die jonge kinderen kunnen hebben met het getal drie in de telrij ('één, twee, vier') en de moeite die het voor de mensheid kostte om tot een telrij van meer dan twee te komen. De stappen in de ontwikkeling van de menselijke soort zien we mogelijk weerspiegeld in de individuele vroegkinderlijke ontwikkeling (denk ook aan de moeite die veel kinderen hebben met het leren doorzien van de functie van het getal 0 en de getalpositie; we komen daar nog op terug).

Verschillende volken op verschillende continenten hebben, zonder onderling contact, vergelijkbare vormen van tellen en vaste getalrepresentaties ontwikkeld, aanvankelijk gekoppeld aan het lichaam (één hoofd, één neus, twee ogen, twee armen, twee benen, vijf vingers). Een volgende stap was de representatie van aantallen, aanvankelijk door het gebruik van takjes, steentjes, botjes of met knopen in een 'koord'. Ook de inkerving van een streepje als aanduiding van '1' is op meer plaatsen en onafhankelijk van elkaar ontstaan. Voor kleine aantallen werden meer streepjes in groepjes bij elkaar gezet, maar voor meer dan vier – het aantal dat nog in één keer goed te overzien is – werden de tekens aangepast (bijvoorbeeld een '>' of '<' om vijf voorwerpen aan te duiden, vergelijkbaar met onze notatie bij het turven: IIII).

In 4000-3000 vóór Christus was rond de Perzische Golf een systeem ontstaan om met kleine steentjes eenheden weer te geven, een schijfje klei te gebruiken voor een tiental en een bolletje klei voor 100 (de originele voorwerpen zijn onder andere te zien in het Louvre in Parijs). Bij zakelijke transacties konden afspraken over hoeveelheden worden vastgelegd door deze voorwerpen, bij wijze van bewijsmateriaal, in een gesloten doosje van klei te bewaren. De ontwikkeling van het schrift gaf vervolgens de mogelijkheid om aan de buitenkant van zo'n doosje ook 'op te

schrijven' hoeveel er in zat. Rond 2000 vóór Christus gebruikten onder andere de Feniciërs daarvoor letters. Elke letter gaf een bepaalde hoeveelheid aan.

Eén hypothese over de ontwikkeling van het tel- en getalsysteem (Ifrah, 2000, p. 19) is, dat in een eerste stadium procedures nodig waren wanneer het in één keer kunnen overzien van vier objecten niet voldeed. Het principe van de één-op-één correspondentie is daarvoor zeer geschikt, omdat het kennen van de telrij daarvoor niet nodig is. Door bijvoorbeeld voor elk object een steentje te pakken en de steentjes mee te nemen naar een andere plaats, is op die nieuwe locatie eenvoudig weer een zelfde aantal objecten bijeen te zoeken via het paarsgewijs overeen laten stemmen (zoals kleine kinderen al de tafel kunnen dekken met het juiste aantal messen en vorken, voordat ze kunnen tellen: het principe van correspondentie). Maar het gaf in de oudheid een veeboer ook de mogelijkheid om zeker te weten of zijn herders 's avonds met evenveel schapen terugkwamen als waarmee ze 's ochtends vertrokken (Gazalé, 2000; Ifrah, 2000; Skemp, 1986), namelijk door in een stok voor elk meegenomen schaap een snee te kerven, de stok in de lengte te splitsen (zodat op elk deel evenveel halve inkervingen staan: de ene helft voor de herder, de andere voor de veeboer) en bij terugkomst te controleren of er voor elk merkteken weer een schaap de stal binnenkwam. Op deze manier hadden beide partijen ook altijd bewijsmateriaal over het juiste aantal.

In een tweede stadium werden vaste 'labels' aan hoeveelheden gegeven, bijvoorbeeld door ze te benoemen met behulp van lichaamsdelen. Zo kon, bij wijze van spreken, 'hand' de betekenis krijgen van 'vijf' of 'arm' een aanduiding zijn voor 'acht' (vijf knokkels van de vuist en drie gewrichten van pols, elleboog en schouder). Door herhaling en het gebruik van steeds dezelfde benoemingen kregen de labels een op zichzelf staande betekenis.

Het derde stadium werd gekenmerkt door het verder ontwikkelen van een vast systeem van getalnamen, met bovendien een vaststaande volgorde. Daarmee kon niet alleen op volgorde worden geteld (ordinatie), maar ontstond ook de gewoonte om met het laatst genoemde 'telwoord' de totale verzameling getelde objecten aan te geven (kardinate). De hand is in dat licht te beschouwen als de eerste en betrouwbare rekenmachine.

Voor het werken met grote aantallen was het, achteraf bezien, 'logisch' om gebruik te maken van groeperingen: één hand stond dan bijvoorbeeld voor vijf objecten, twee handen voor tien, drie voor vijftien, et cetera. Onder andere de Sumeriërs gebruikten een schijfje klei om tien voorwerpen weer te geven en een bol klei voor honderd. Tien schijfjes waren inwisselbaar voor één bol. Het noteren van grote aantallen door middel van symbolen of letters werd echter in reeksen gedaan, zoals bijvoorbeeld ook de Romeinen ruim drieduizend jaar later met de reeks XXIII twee tientallen en drie eenheden afbeeldden (vervolgens nog op te tellen tot drieëntwintig). Het rekenen zelf gebeurde op een telraam (abacus) en de resultaten werden met de letterreeksen opgeschreven. Een getal '0' was daarbij overbodig: 'honderdtien' werd immers geschreven als CX, waarbij elke letter naar een vaste hoeveelheid verwees. De ontdekking dat het inwisselsysteem kon worden genoteerd met een eenduidige getalpositie, waarin niet het type letter of symbool, maar de plaats waarop het symbool staat de waarde bepaalt, maakte het nodig met een apart symbool weer te kunnen geven dat op een bepaalde plaats 'niets' (bijvoorbeeld: 'geen tientallen') staat: de uitvinding van de '0'.

Stel dat we in symbolen willen weergeven hoeveel voorwerpen we bedoelen met twee bollen klei en negen kleine steentjes. In een Romeinse notatie is dat:

CCIX (honderd, nog eens honderd, en dan nog één ‘voorafgaand aan’ tien). Wij noteren dat als 209. Onze notatie heeft immers een vast positiestelsel met als volgorde: honderdtallen (twee), tientallen (nul), eenheden (negen). Wanneer we er één voorwerp aan toe zouden voegen, dan wordt onze notatie vanzelfsprekend 210: 2 (van honderd), 1 (van tien) en 0 (van één). In de Romeinse notatie zou het worden: CCX. In het positiestelsel en het inwisselsysteem zoals wij dat kennen, heeft ‘0’ dus een cruciale functie. Dit systeem maakt ook het cijferend ‘op papier’ rekenen goed mogelijk. Met Romeinse letters lukt dat uiteraard niet.

De positieregel in getallen is ‘slechts’ enkele keren ontdekt in de geschiedenis van de mensheid (Ifrah, 2000): rond 2000 vóór Christus door de Babyloniërs (en door de Chinezen overgenomen), tussen 300-500 na Christus in de Maya-cultuur van Centraal Amerika en rond 500 in India (via Arabische kooplieden in onze westerse wereld terechtgekomen en in die zin ten onrechte ‘Arabische cijfers’ genoemd). Het eerste bekende document waarin een meercijferig getal voorkomt zoals we dat nu nog gebruiken, stamt pas uit het jaar 594 na Christus en het getal is 346 (Ifrah, 2000, p. 400-401).

opvoeding en
onderwijs

Het voorgaande betekent dat zoiets vanzelfsprekends als onze dagelijkse getal- en rekennotatie nog maar van betrekkelijk recente datum is en in onze westerse cultuur niet langer dan een paar honderd jaar gebruikt wordt. Het betekent overigens ook dat dit type specifieke kennis en vaardigheden nog op geen enkele manier in onze genen is vastgelegd. Er is een ‘primitieve’ aanleg voor een elementair hoeveelheidsbegrip (denk aan de kraai en de baby-experimenten), maar er zijn bijvoorbeeld nog geen genetisch voorbestemde reken- en wiskundegebieden in onze hersenen (Dehaene, 1997, p. 6; zie ook hoofdstuk 4). Bepaalde delen van onze hersenen zijn *in principe* geschikt voor het leren van een aantal in de evolutie belangrijk gebleken vaardigheden (zoals: het waarnemen van klanken en van kleine visuele verschillen, of het herkennen van kleine hoeveelheden), maar alleen door zeer intensieve stimulering (opvoeding en onderwijs) kunnen deze hersengebieden zich als het ware in elke ontwikkeling en bij elk kind opnieuw verder specialiseren voor bijvoorbeeld lezen en vermenigvuldigen. Anders gezegd: bepaalde gebieden in onze hersenen lenen zich in principe goed voor rekenen/wiskunde, maar iedereen moet het hele systeem van feiten en afspraken toch opnieuw door stimulatie vanuit de omgeving *leren*. Wat in de loop van vele eeuwen is bedacht en ontwikkeld dragen we binnen enkele jaren onderwijs over aan onze kinderen. Het menselijk leren is een zeer krachtig systeem dat, wonderlijk genoeg, bijna altijd functioneert. Slechts bij een gering percentage van de leerlingen doen zich problemen of hardnekkige beperkingen voor.

1.2 LEREN EN INDIVIDUELE VERSCHILLEN

We leren voortdurend, dikwijls zonder het te merken. Leren is een proces waarin door middel van ervaring wijzigingen ontstaan in bestaand gedrag of begrip (Bernstein, Clarke-Stewart, Roy & Wickens, 1997, p. 191). Dit

gedrag of begrip kan zich al snel na de geboorte min of meer uit zichzelf voordoen (denk aan de genoemde babyexperimenten), maar het kan ook volgen uit verdere rijping of door bij te leren: we worden handiger of gaan iets beter doen, we leren uit contacten met anderen, uit de krant, via radio en televisie, en zijn nooit te oud om te leren. Leren gaat over het algemeen zo vanzelfsprekend, dat we er niet bij stilstaan wat leren precies is. Als we aan leren denken, zal dat waarschijnlijk aan het leren op school zijn, aan het leren van woorden in een vreemde taal, het leren van plaatsnamen voor aardrijkskunde of van formules bij wiskunde.

Van veel kennis en vaardigheden is niet eens meer voor te stellen hoe we die ons eigen hebben gemaakt. Lezen, schrijven en eenvoudige rekenbewerkingen passen we op basis van ervaring vrijwel automatisch toe, zonder ons bewust af te vragen waarom we dat doen. En als iets moeilijker wordt, schakelen we ongemerkt over op een andere aanpak. Stel dat iets te koop is voor de halve prijs en dat je daarop nog eens 25% korting krijgt. Om uit te zoeken hoe duur het wordt, herformuleren we de extra korting misschien handig tot ‘een vierde deel van de halve prijs’, maar we kunnen het eventueel ook stap voor stap cijferend uitrekenen door de prijs te delen door 2 (staartdeling), de uitkomst te vermenigvuldigen met 0,25 (onder elkaar) en het resultaat daarvan weer van de halve prijs af te trekken (cijferend in kolommen). Dat is weliswaar minder efficiënt, maar leidt tot hetzelfde resultaat. Zulke verschillen in aanpak zijn vergelijkbaar met het lezen van een tekst. Een eenvoudige tekst lezen we ‘vanzelf’, maar bij een moeilijke passage vertragen we ongemerkt het leestempo, lezen het nog een keer of spellen het desnoods hardop. We schakelen dus ‘gewoon’ over van een min of meer automatische vaardigheid naar een bewuster niveau van kennis of eventueel naar stap voor stap procedures. In hoofdstuk 3 gaan we nader in op verschillende typen kennis, procedures en het proces van automatisering.

kennis,
procedures en
automatisering

Hoe is ‘leren’ te definiëren? Als we ergens mee worden geconfronteerd of iets meemaken, zullen we proberen om dit met behulp van onze voorkennis te interpreteren: heb ik dit al eens vaker gezien, is er eerder zoiets gebeurd, lijkt het op iets wat ik ken? Nieuwe ervaringen worden ingepast in de zich continu uitbreidende voorkennis. Maar in situaties waarin er geen afdoende bestand aan voorkennis is en er, bij wijze van spreken, verwarring en onzekerheid optreden, is een nieuwe afstemming op de omgeving nodig.

Het *inpassen* van nieuwe kennis in het oude kennisbestand werd door Piaget (1947, 1966, 1969) assimilatie genoemd. Het *aanpassen* van al bestaande kennis noemde hij accommodatie: de aanwezige gestructureerde voorkennis – de zogenaamde cognitieve schema’s of cognitieve structuur – moet geschikt gemaakt worden voor nieuwe eisen. Interacties tussen mens en omgeving leiden dus tot verandering, tot leren, om de opgeroepen verwarring tussen oud en nieuw weer ongedaan te maken. Het opheffen van die verstoring is voor Piaget als het ware de motor die leren en ontwikkeling gaande houdt (zie ook paragraaf 2.2.1: het principe van equilibratie). De cruciale vraag blijft natuurlijk (Siegler, 1978): Wát verandert er precies? In de hoofdstuk-

assimilatie
accommodatie

interacties

ken 2, 3 en 4 gaan we daar aan de hand van de belangrijkste theorieën verder op in, met voorbeelden uit het domein van rekenen/ wiskunde.

duurzaam Met cognitief leren bedoelen we in ieder geval dat het geleerde duurzaam is en in principe ook is toe te passen in en uit te breiden naar nieuwe situaties (transfer). Met wat we leren zijn we tot nieuwe dingen in staat. Leren geeft nieuwe mogelijkheden. Een andere manier om dit te zeggen is: leren leidt tot (meer of nieuw) potentieel en dit potentieel is waarneembaar in gedrag. De hier genoemde kenmerken zien we terug in definities van wat leren is. Een voorbeeld is de definitie die Van Parreren geeft (1969, p. 17; vgl. Boekaerts & Simons, 1993, p. 3):

Leren is een proces met min of meer duurzame resultaten, waardoor nieuwe gedragspotenties van de persoon ontstaan of reeds aanwezige zich wijzigen.

De verwijzing naar ‘min of meer duurzame resultaten’ betekent dat tijdelijke, toevallige schommelingen in ons gedrag – of bijvoorbeeld de invloed van vermoeidheid of alcohol – niet onder leren vallen. Maar leeractiviteiten kunnen zich natuurlijk wel ‘toevallig’ of onbedoeld aandienen, bijvoorbeeld terwijl kinderen met hun ouders en met andere kinderen spelen, bij het voorlezen en televisie kijken, of tijdens het uitproberen van de computer. In zulke gevallen wordt van incidenteel leren gesproken. Wanneer we het hebben over het schoolse leren, dan gaat het veelal om intentioneel leren, gericht op het in een bepaalde tijd bereiken van een omschreven kennis- en vaardigheidsniveau. Het gebruik van gesystematiseerde methoden voor het leren lezen, schrijven en rekenen is daarvan een duidelijk voorbeeld. De volwassene heeft in dat proces direct of indirect de rol van bemiddelaar (mediator), die de informatie meer of minder expliciet ordent en selecteert, verwoordt, samenvat, herhaalt en vergelijkt (Feuerstein, 1979; Vygotsky, 1964). Voor kinderen met rekenproblemen is de kwaliteit van die bemiddeling van extra belang, zoals we nog zullen zien in de hoofdstukken 5, 6, 7 en 8. In dat verband gaan we ook in op het onderscheid tussen sturende en banende instructie (zie ook box 6.2 en paragraaf 6.3.3) en op het verschil tussen directe instructie en stimuleren van de eigen inbreng van leerlingen. In het laatste geval wordt de actieve en constructieve aard van het leren benadrukt, zoals zich dat afspeelt in een socio-culturele context (vgl. Verschaffel, 1995).

Leerlingen verschillen van elkaar in het gemak waarmee ze iets nieuws leren en kunnen overstappen op andere manieren van informatieverwerking. Maar er zijn meer verschillen tussen leerlingen, zoals in: het kunnen volhouden van een taak, het kunnen vasthouden van instructie, het gemak waarmee de essentie van een opdracht wordt doorzien, het kunnen nadenken over de eigen manier van werken, het zichzelf controleren of de snelheid van het verwerken van informatie. Afhankelijk van de taak zien we ook binnen één leerling variaties: het begrijpend lezen van een moeilijke tekst gaat misschien planmatig, terwijl bij het werken met formules van een wel-

individuele
verschillen in
het leren

overwogen aanpak niets meer is te merken. Of: het leren van talen gaat probleemloos, maar wiskunde lijkt onbegonnen werk. We zijn gewend aan zulke individuele verschillen in het leren. Het onderwijs houdt daar enigszins rekening mee, bijvoorbeeld in schooltypes en vakkenpakketten, of door middel van adaptief onderwijs, individualisering en remediëring. In hoofdstuk 4 komt het thema ‘individuele verschillen’ uitgebreider ter sprake. Verschillen tussen en binnen mensen (respectievelijk inter- en intra-individuele verschillen) zijn normaal. Slechts in bepaalde gevallen blijken de verschillen zo afwijkend, onverwacht en/of hardnekkig dat we van een probleem of zelfs een stoornis spreken.

1.3 REKENEN EN REKENPROBLEMEN

leerlijnen en
leerdoelen

In het onderwijs leren kinderen rekenen/wiskunde op den duur kennen als een (formeel) afsprakensysteem, als een taal waarmee we in onze samenleving communiceren over hoeveelheden en relaties daartussen. Rekenen is, naast lezen en schrijven, een van de culturele vaardigheden. De precieze inhoud en de verdeling van de leerstof over leerjaren worden vastgelegd in zogenaamde ‘leerlijnen’ en daarmee samenhangende leerdoelen die leerlingen na een bepaalde onderwijsperiode normaal gesproken bereiken. Aan de hand van deze doelen is te peilen in hoeverre scholen erin slagen de gestelde doelstellingen te realiseren (vgl. Janssen, Van der Schoot, Hemker & Verhelst, 1999; Kraemer & Janssen, 2001). In hoofdstuk 5 geven we een overzicht van de verschillende leerlijnen binnen het basisonderwijs.

Wanneer we een definitie van rekenen willen geven, dan zou een pragmatische oplossing zijn om het te omschrijven als ‘het totaal van de leerlijnen rekenen die op school aan bod komen’. De nadruk ligt dan vooral op het eindproduct van het onderwijs en niet op het type cognitieve activiteit of het proces dat rekenen onderscheidt van andere culturele vaardigheden.

rekenen/wiskunde
als manier van
ordenen

reken-/
wiskundetaal

In de literatuur zijn verschillende definities te vinden, afhankelijk van de theoretische oriëntatie die daarbij wordt gekozen. In hoofdstuk 2 komen de belangrijkste theorieën aan bod. Binnen een ontwikkelingspsychologisch kader zal een verband worden gelegd met de denkontwikkeling van kinderen (‘Rekenen is kwantificerend *logisch* denken’) en de handelingsleerpsychologie benadrukt dat rekenen een speciale vorm is van denkend handelen (‘Rekenen is *handelen*’). Verschillende theorieën leiden zo tot verschillende definities. Maar er zijn ook overeenkomsten, bijvoorbeeld in de functie die rekenen/wiskunde heeft als manier van ordenen en als middel om kenmerken van de ons omringende wereld te beschrijven. De symbolische reken-/wiskundetaal is exacter, formeler en abstracter dan de dagelijkse taal. Met slechts enkele symbolen kunnen complexe en logische relaties worden weergegeven (bijvoorbeeld: $x + y = z$, *dus*: $x + y - z = 0$).

In dit boek maken we over het algemeen geen onderscheid tussen rekenen en wiskunde. Beide zijn op te vatten als formele manieren om de reali-

definitie van
rekenen

teit te ordenen en te structureren, gebaseerd op handelend en experimenterend leren (vgl. Nelissen, 1977, p. 128). Een definitie van rekenen is daarom, in ieder geval gedeeltelijk, ook van toepassing op wiskunde. We gaan uit van de volgende definitie van rekenen (vgl. Ruijsenaars, 1992, p. 39):

Rekenen is een proces waarin een realiteit (of een abstractie daarvan) wordt geordend of herordend met behulp van op inzicht berustende denkhandelingen, welke ordening in principe is te kwantificeren en die toelaat om er (logische) operaties op uit te voeren dan wel uit af te leiden.

De definitie omvat zowel de voorbereidende rekenvaardigheden in de kleutergroepen (zie hoofdstuk 6) als het aanvankelijk rekenen in groep 3 en het gevorderde rekenen. Handelingen (zoals: erbij doen, samenvoegen, telkens wegnemen) zijn uit te voeren zonder volledig begrip van hoeveelheid, maar ze zijn wel ‘in principe te kwantificeren’. Zulke rekenactiviteiten vallen evenzeer onder de gegeven definitie als het oplossen van vraagstukken of de bewerkingen met breuken.

denkhandelingen

Rekenen/wiskunde is een proces, een actief proces. Het lezen van getallen, het uit het geheugen opdreunen van getalreeksen of antwoorden is geen rekenen. Rekenen veronderstelt handelingen, denkhandelingen, met of zonder materiaal. Het uitvoeren van denkhandelingen betekent het te weegbrengen van veranderingen, het transformeren van de ene ordening in één of meer nieuwe ordeningen, bijvoorbeeld door: toevoegen, herhaald wegnemen, anders voorstellen, opdelen, vereenvoudigen, schematiseren. Dit proces verloopt niet willekeurig, maar (meer of minder) doelgericht en logisch, ook al is de logica voor de buitenstaander niet altijd direct duidelijk. Handelingen en tussenstappen hangen met elkaar samen en zijn uit elkaar af te leiden.

doelgericht en
logisch

probleemoplos-
sing en informa-
tieverwerking

Rekenen, als manier van ordenen, is ook een proces van probleemoplossing en informatieverwerking met stappen als: analyseren van binnenkomende gegevens, vergelijken van informatie met aanwezige voorkennis, in het werkgeheugen beschikbaar houden van informatie en tussentijds controleren. Hierbij wordt mede een beroep gedaan op cognitieve vaardigheden die niet specifiek zijn voor het rekenen, zoals het inzichtelijk kunnen ordenen van gegevens in het werkgeheugen of het snel kunnen oproepen van feitenkennis. Problemen daarmee wreken zich in elk leer- en oplossingsproces.

leerproces

Rekenen is bovendien een leerproces, waarin elke oplossing van een probleem leidt tot verder inzicht, tot meer samenhang tussen ervaringen en een toename in vaardigheid. De ordeningen worden steeds efficiënter, maar ook complexer. De mediërende rol van de omgeving (ouders, andere kinderen, school) is daarbij belangrijk.

rekenproblemen

Aan de hand van de gegeven definitie van rekenen kunnen we al iets zeggen over verschillende kenmerken van rekenproblemen. Deze zijn te beschrijven aan de hand van het rekenproces (problemen met het uitvoeren van denkhandelingen, in de informatieverwerking, het probleemoplos-

singsproces) of meer vanuit het specifieke kwantificerende karakter van het rekenen en de daarbij behorende rekentaal (bijvoorbeeld: problemen met het leren tellen, het vlot en foutloos omgaan met rekenfeiten, hoeveelheidbegrippen en -relaties). Bovendien zijn verbanden te leggen met lacunes in de verwerving van cognitieve voorwaarden (inzicht en logisch denken) en met tekorten in het onderwijs. Op twee aspecten gaan we alvast kort in: het leren van rekenfeiten en -procedures, alsook het automatiseren van kennis.

1.3.1 Feiten en procedures

In het omgaan met hoeveelheden in de dagelijkse realiteit gebruiken we taal. We benoemen en beschrijven voorwerpen en gebeurtenissen onder andere met getallen (bijvoorbeeld: de trein heeft 5 minuten vertraging), of met begrippen die eventueel in getallen zijn om te zetten (bijvoorbeeld: deze trein heeft *minder* wagons dan die van gisteren), maar ook met allerlei andere termen die kunnen verwijzen naar hoeveelheden (bijvoorbeeld: van mij mogen ze er eentje *bij doen*). Onze taal is ingenieus en complex. We kunnen zelfs allerlei wiskundige situaties beschrijven en oplossen, zonder ingewikkelde vaktermen nodig te hebben. Het volgende is daarvan een illustratie (naar: Van de Geer, 2000, p. 9):

Stel dat er in ons land evenveel meisjes als jongens worden geboren. We weten dat van een bepaald gezin met twee kinderen er één 'n meisje is. Wat is de kans dat het andere kind ook een meisje is?

Voor de oplossing van dit probleem hebben we wel inzicht en een vorm van logisch denken nodig, maar niet per se een specifieke reken- of wiskundetaal. We kunnen een oplossingsprocedure bedenken en die uitleggen in dagelijkse spreektaal:

Als een kind geboren wordt, kan het een jongen of een meisje zijn. In een gezin waarin twee kinderen ter wereld komen, kan eerst een jongen geboren worden en daarna nog een, of er komt daarna een meisje. Als er eerst een meisje geboren wordt, dan komt er daarna misschien nog een meisje, maar het kan ook een jongen zijn. Meer mogelijkheden zijn er niet. Als we al weten dat tenminste één van de kinderen een meisje is, dan valt de mogelijkheid van het gezin met twee jongens af en blijven drie combinaties over, met als geboortevolgorde van de kinderen: jongen-meisje, meisje-jongen, meisje-meisje. Van deze drie mogelijkheden is slechts in één geval het andere kind óók een meisje. Oftewel: de kans dat het andere kind ook een meisje is, is één op drie.

(Opmerking: Stel dat de vraag was geweest: U belt aan bij een gezin met twee kinderen, en een meisje doet open. Wat is de kans dat het andere kind ook een meisje is? In dat geval is er een kans van één op twee; Van de Geer, 2000, p. 9).